UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
DEPARTAMENTO DE COMPUTACIÓN Y
TECNOLOGÍA DE LA INFORMACIÓN
CI2521– Estructuras Discretas I

<u>GUÍA PRÁCTICA Nº 1</u>
(Teoría de Conjuntos)

1. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbf{Z} \ / \ |x| \leq 3\}$ y $B = \{x \in \mathbf{Z} \ / \ x^2 < 7\}$. Determine: $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$ y $A \Delta B$.
2. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbf{R} \ / \ \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq 2\}$ y $\{x \in \mathbf{R} \ / \ |x-1| \leq \frac{3}{2}\}$. Obtenga $A \cap B$, $A \cup B$ y B^C.
3. Demuestre los siguientes resultados de teoría de conjuntos:
   (a) $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \Rightarrow A \subseteq B \cap C$
   (b) Si dos conjuntos están incluidos en un tercero, entonces su unión también lo estará.
   (c) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$
   (d) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
   (e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
   (f) ¿Cuál de las siguientes contenciones es siempre verdadera:
   $$(A-B)-C \subseteq A-(B-C) \ \text{ o } \ A-(B-C) \subseteq (A-B)-C?$$
   (g) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$
   (h) $B \subseteq A \Leftrightarrow (A - B) \cup B = A$
   (i) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$
   (¿Valdrá la recíproca de esta implicación?)
   (j) Si A y B son conjuntos disjuntos y $A \cup B = C$, entonces $A = C - B$.
   (k) $A \cup B = \mathbf{U} \Leftrightarrow A^C \subseteq B$
   (l) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B^C$
   (m) $A \cup B = A - B \Leftrightarrow B = \varnothing$
   (n) $A \cap B = B - A \Leftrightarrow B = \varnothing$
   (o) $A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$
   (p) $(A^C \cup B) \cap (A \cap B)^C = A^C$
   (q) $(A \cup B)^C \cup (A^C \cap B) = A^C$
   (r) $(A \Delta B)^C = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$.
   (s) Si $A \subseteq B$, $C \subseteq B$ y $A \cap C = \varnothing$ entonces $B \cap (A \Delta C) = (A - C) \cup (A \cup C^C)^C$
4. Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
   (a) $1 \in A$ (b) $\varnothing \in A$ (c) $\{1\} \in A$ (d) $\{1\} \subseteq A$
   (e) $\{2\} \in A$ (f) $\{2\} \subseteq A$ (g) $\{\{2\}\} \subseteq A$ (h) $\{\{1\}\} \subseteq A$
5. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?
   (a) $\varnothing \in \varnothing$ (b) $\varnothing \subseteq \varnothing$ (c) $\varnothing \in \{\varnothing\}$ (d) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
6. Si $A = \{\varnothing, a\}$, entonces ¿puede asegurarse que $A - \varnothing = \{a\}$?
7. Para $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ determine el número de
   (a) subconjuntos de A
   (b) subconjuntos propios de A
   (c) subconjuntos no vacíos de A
   (d) subconjuntos propios no vacíos de A
8. Si un conjunto A tiene 127 subconjuntos propios, ¿Cuántos elementos tiene A, es decir, cuánto vale $|A|$ *(cardinal de A)*?
9. Sean $\mathbf{U} = \{a,b,c,\ldots,x,y,z\}$, $A = \{a,b,c\}$ y $C = \{a,b,d,e\}$. Si $|A \cap B| = 2$ y $B \subseteq C$, determine B.

10. Determine los conjuntos A, B cuando $A-B = \{1,3,7,11\}$, $B-A = \{2,6,8\}$ y $A \cap B = \{4,9\}$.
11. Sean $A,B,C,D,E \subseteq \mathbf{Z}$ definidos como sigue:
    $A = \{2n \ / \ n \in \mathbf{Z}\}$ *(es decir, A es el conjunto de todos los múltiplos enteros de 2);*
    $B = \{3n \ / \ n \in \mathbf{Z}\}$; $C = \{4n \ / \ n \in \mathbf{Z}\}$;
    $D = \{6n \ / \ n \in \mathbf{Z}\}$; $E = \{8n \ / \ n \in \mathbf{Z}\}$.
    ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?
    (a) $E \subseteq C \subseteq A$ (b) $A \subseteq C \subseteq E$ (c) $B \subseteq D$
    (d) $D \subseteq B$ (e) $D \subseteq A$ (f) $D^C \subseteq A^C$
    Determine cada uno de los siguientes conjuntos:
    (a) $C \cap E$ (b) $B \cup D$ (c) $A \cap B$
    (d) $B \cap D$ (e) A^C (f) $A \cap E$
12. Analice la veracidad o falsedad de la afirmación:

$$A \Delta (B-C) = B \Delta (A-C)$$

    donde A, B y C son conjuntos cualesquiera.

    El análisis anterior consistirá en lo siguiente: Si usted considera que la afirmación dada es **verdadera**, demuéstrela. De lo contrario, si usted cree que es **falsa**, muestre un contraejemplo.
13. Si A y B son conjuntos tales que $A \Delta B = A$, demuestre que $B = \varnothing$.
14. Demuestre que si $A \subseteq B$, entonces $(A \Delta B) \cap A = \varnothing$.
15. Demuestre o refute lo siguiente, para los conjuntos $A,B \subseteq \mathbf{U}$.
    (a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ (b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
16. Si A es un conjunto con 14 subconjuntos propios no vacíos tal que $\{\{1\},\{\varnothing\},\{\{1\},2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Obtenga, por extensión, A y $\mathcal{P}(A)$.
17. Sean $\mathbf{U} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y $\mathbf{A} = \{2,5,7,8\}$. Determine el *número* de subconjuntos de **U** que *no* son subconjuntos de **A**.
18. Sea el conjunto $A = \{1,\{1\}\}$.
    (a) Determine el cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
    (b) Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos (V) y cuáles son falsos (F):
    (i) $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ (ii) $\varnothing \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ (iii) $A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$
19. Sea A un conjunto. Si $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ tiene 65536 elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto A?
20. Sea $\mathbf{U} = \mathbf{R}$ y sea $I = \mathbf{Z}^+$. Para cada $n \in \mathbf{Z}^+$, sea $A_n = [-2n,3n]$. Determine lo siguiente:
    (a) A_3 (b) A_4 (c) $A_3 - A_4$ (d) $A_3 \Delta A_4$
e (e) $\overset{7}{\underset{n=1}{}} A_n$ (f) $\bigcap_{n=1}^{7} A_n$ (g) $\underset{n \in I}{} A_n$ (h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$
21. Sea $A_n = \{n,n+1,n+2,...,2n\}$ para cada $n \in \mathbf{Z}^+$. Determine:
    (a) $\bigcap_{n=6}^{10} A_n$ (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (c) $\underset{n \in \mathbf{Z}^+}{} A_n$ (d) $A_9 \Delta A_{11}$
    (e) ¿Es la familia de los A_i una partición de $\mathbf{Z}^+$? Explique.
22. Sea $A_n = \{$Divisores positivos de $2n\}$, donde $n \in \mathbf{Z}^+$. Obtenga
    (a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (b) $\overset{\infty}{\underset{n=1}{}} A_n$

23. Determine si cada una de las siguientes familias de conjuntos es una partición para el conjunto dado A. Si la familia no es una partición, explique por qué.
    (a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $A_1 = \{4,5,6\}$, $A_2 = \{1,8\}$, $A_3 = \{2,3,7\}$
    (b) $A = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$;$A_1 = \{d,e\}$,$A_2 = \{a,c,g\}$,$A_3 = \{f,h\}$,$A_4 = \{b,g\}$
    (c) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$; $A_1 = \{1,3,7\}$, $A_2 = \{2,6\}$, $A_3 = \{5,8\}$
    (d) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $A_k = \{k,k+5\}$, donde $1 \leq k \leq 5$
    (e) $\mathbf{Z}$; $A_k = \{-k,k\}$, donde $k \in \mathbf{Z}^+$
24. ¿Es la familia $\{\emptyset,\{1\},\{2,4\},\{3,5,7\},\{6,8,9,0\}\}$ una partición del conjunto $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?
25. Sean:

$$A_1=\{1, 11, 21, 31, \ldots\}$$
$$A_2=\{2, 12, 22, 32, \ldots\}$$
$$\vdots$$
$$A_n=\{n, n+10, n+20, n+30, \ldots\}$$
$$\vdots$$

    ¿Es la familia $\{A_1, A_2, \ldots\}$ una partición de $\mathbf{Z}^+$?. Justifique su respuesta.
26. Indique, justificando su respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
    (a) Si $A\cap B = \emptyset$ y $C\subseteq B$, entonces $A\cap C = \emptyset$.
    (b) Si $B-C = \emptyset$ y $A\subseteq B$, entonces $A-C = \emptyset$.
    (c) Si $A = \{\{1,2\},3\}$, entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{\{1\}\},\{\{2\}\},\{\{1,2\}\},\{3\},A\}$.
    (d) $(A-C)-(B-C) = (A-B)-C$, donde A, B y C son conjuntos cualesquiera.
    (e) Si A, B y C son conjuntos cualesquiera, entonces *siempre* se cumple que $A\cup(B-C) = (A\cup B)-(A\cup C)$.
    (f) Si A y B son conjuntos tales que $A-B = \emptyset$, entonces debe cumplirse que $A\subseteq B$.
    (g) La proposición dual de $(A\cup B^C)\cap B = A\cap B$ es $(A-B)\cup B = A\cup B$
    (h) Si A y B son conjuntos disjuntos, entonces $A^C\cup B^C = \mathbf{U}$.
    (i) Si $A = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, entonces $\mathbf{P}(A) = \{\emptyset,\{\emptyset\},A\}$.
    (j) La proposición dual de $(A\cup B^C)\cup(B\cup A^C) = \mathbf{U}$ es $(A-B)\cap(B-A) = \emptyset$, donde A y B son conjuntos cualesquiera.
    (k) Si $A\subseteq B$, entonces $A^C\cap B^C = A^C$.
    (l) Si A y B son *conjuntos disjuntos*, entonces $\mathbf{P}(A)\cap\mathbf{P}(B) = \{\emptyset\}$.
    (m) La familia de conjuntos $\{\mathbf{Q}^+, \mathbf{Z}^+, \{0\}, \mathbf{Q}^-, \mathbf{Z}^-\}$ es una *partición* del conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales.
    (n) Si $A\subseteq B$ entonces $A\Delta B=B-A$.